

**Entdeckung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes mit Smartphone und Wärmebildkamera****Lars Schäfer\*, Hans-Otto Carmesin<sup>+</sup>**

\*Kooperative Gesamtschule Drochtersen, Schulstraße 8, 21706 Drochtersen,

<sup>+</sup>Studienseminar Stade, Bahnhofstraße 5, 21682 Stade, Gymnasium Athenaeum Stade, Harsefelder Straße 40,  
21680 Stade, University Bremen, Otto – Hahn – Alle 1, 28359 Bremen

Hans-Otto.Carmesin@athenetz.de

**Kurzfassung**

Der Klimawandel ist inzwischen als eine der größten Herausforderungen der Menschheit anerkannt. Weniger klar ist die Situation beim Verständnis von Klimamodellen und dem Einfluss von Treibhausgasen. Insbesondere die Rolle von CO<sub>2</sub> wird gerne von einflussreichen Politikern und manchen Parteien dementiert. In diesem Beitrag zeigen wir, dass Schüler den Einfluss von CO<sub>2</sub> selbstständig quantitativ mittels des Stefan-Boltzmann-Gesetzes auf zuverlässige und zweifelsfreie Art nachweisen können. Damit die Lernenden das Stefan-Boltzmann-Gesetz selbstständig entdecken können, präsentieren wir passende ein Experiment mit einer Smartphone-Wärmebildkamera. Dieses Experiment wurde erfolgreich in einem Unterrichtsversuch getestet und setzte sich im Versuch bei den Schülern klar im Vergleich mit herkömmlichen Experimenten durch. Insgesamt befähigen wir damit die Lernenden zur Bildung eines eigenständigen Urteils über den Einfluss.

**1. Einleitung**

Glühende Körper leuchten sichtbar und geben somit elektromagnetische Strahlung ab. Genauer entsendet jeder Körper, der eine Temperatur ungleich 0 Kelvin hat, Wärmestrahlung, d.h. elektromagnetische Strahlung, die am Ort des Entstehens im thermischen Gleichgewicht mit der abstrahlenden Materie ist. Die Leistung  $P$  dieser Strahlung hängt von der Temperatur  $T$  des Gegenstandes und dessen Oberfläche  $A$  ab. Um eine von der Oberfläche unabhängige Größe zu erhalten, führt man die **Leistungsdichte**  $S=P/A$  ein.

Das **Stefan-Boltzmann-Gesetz** (Gerthsen S.595 bzw. Tipler-Mocsa 2015, S.639) besagt nun, dass die Leistungsdichte  $S$  eines schwarzen Körpers proportional zu  $T^4$  ist. Die zugehörige Proportionalitätskonstante heißt **Stefan-Boltzmann-Konstante**, d.h.

$$S = \sigma \cdot T^4 \quad \{1\}$$

mit  $\sigma = 5,6706 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Da das Stefan-Boltzmann-Gesetz grundlegend in der Behandlung von Klimamodellen ist, geht seine Bedeutung weit über die Physik hinaus. Die klassische Herleitung dieses Gesetzes durch Boltzmann (Boltzmann 1884) basiert auf den thermodynamischen Grundgleichungen eines abgeschlossenen Systems und auf der Berechnung der Energiedichte elektromagnetischer Strahlung mittels der Maxwell'schen Elektrodynamik. Die quantenmechanische Herleitung (Demtröder 1995, S. 356) integriert das Planck'sche Strahlungsgesetz, welches die statistische Thermodynamik und die Quantenhypothese von Planck (die Geburtsstunde der Quantenmechanik) verwendet. Diese beiden Wege können in der Schule nicht gegangen werden.

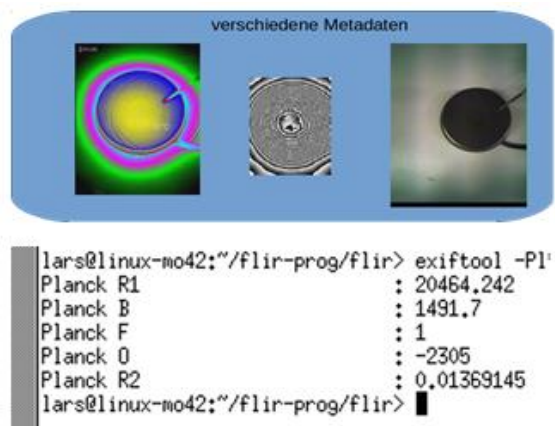
In Schulphysikbüchern (Dorn-Bader 2008, Dorn-Bader 2017, Cornelsen 2008 und Impulse 2017) gibt

es für die experimentelle Einführung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes wenig Anregungen. Ähnlich ist es mit den Standardwerken der Experimentalphysik (Tipler-Mocsa 2015, Gerthsen 2015). Zur Messung der Leistungsdichte verwenden diese häufig eine Thermosäule, während als Wärmequelle gerne eine Herdplatte, der Leslie-Würfel oder ein Rohrofen mit Schwarzkörperzusatz (Leybold 2019) gewählt wird. Bei der Herdplatte ist das Warten auf das thermische Gleichgewicht langwierig und die Wärmeverteilung nicht sehr homogen (siehe Abbildung 6). Beim Leslie-Würfel ist der Temperaturbereich gering (Carmesin 2004). Das Rohrofen-Experiment ist zur Durchführung durch Lernende ungeeignet und wird von diesen vermutlich als exotisch wahrgenommen. Eine sehr interessante Alternative ist die Verwendung eines Flüssigkeitsthermometers anstelle der Thermosäule (Carmesin 2004, Universum 2018). Da eine Wärmebildkamera Leistungsdichten misst und daraus die Temperatur bestimmt (siehe Abschnitt 2.2), liegt ein Experiment mit einer Wärmebildkamera nahe. Dieses Mittel ist der Lebenswelt der Lernenden sehr nahe und daher sehr aktivierend.

**2. Wärmebildkameras**

Wärmebildkameras gibt es schon seit geraumer Zeit für professionelle Zwecke, wie z.B. Bauthermographie, Verlustleistungsmessung in der Leistungselektronik, Lagebeurteilung nach Bränden, zur Personensuche und für militärische Zwecke. Seit kurzem gibt es neben diesen kostspieligen Geräten auch solche in einem für private und schulische Anwendungen interessanten Preissegment. Insbesondere ist zu erwarten, dass durch die Markttöffnung hin zu privaten Anwendern das Preis-Leistungs-Verhältnis sich noch weiter verbessert.

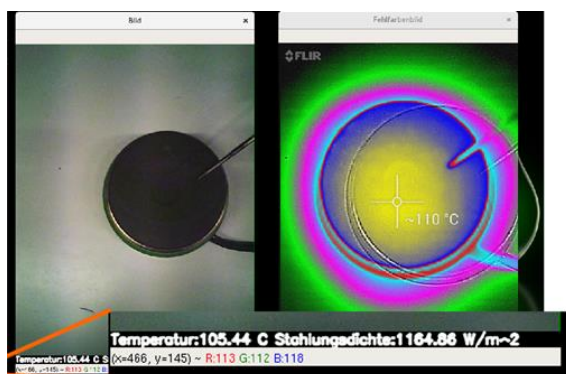
In diesen findet man neben den Rohdaten des Sensors und dem Fehlfarbenbild auch die Kalibrierungsdaten der Kamera (siehe Abbildung 5). Auf Foren von Experten der Bauthermographie ist die Kalibrierungskurve unseres Modells bekannt, so dass wir alle Information zur Bestimmung von  $S$  haben.



**Abb. 5:** Struktur eines JPG-Bildes und ausgelesene Metadaten zur Kalibrierung

Mittels dieses Wissens kann man nun jedem Bildpunkt des eingebetteten Bildes oder des Fehlfarbenbildes einen Punkt im Sensorbild zuordnen und damit die dortige Leistungsdichte ermitteln.

Das Auslese-Programm liest selbstverständlich selbstständig die Kalibrierungsdaten, das Bild, das Fehlfarbenbild und die Sensordaten aus. Das Bild und das Fehlfarbenbild stellt es auf dem Bildschirm dar. Klickt der Benutzer auf einen Punkt im Bild oder Fehlfarbenbild, so bestimmt das Programm den Sensorwert an diesem Punkt und ermittelt damit, wie oben beschrieben, die Leistungsdichte sowie die Temperatur und gibt beides aus (siehe Abbildung 6).



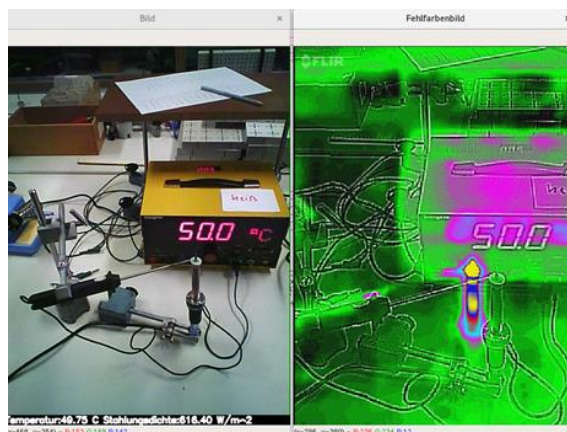
**Abb. 6:** Screenshot des Auslese-Programms

### 3. Das Experiment zum Stefan-Boltzmann-Gesetz

#### 3.1. Aufbau

Ein LötKolben wird mit der Spitze nach oben fixiert und die Unterlegscheibe von oben aufgelegt. Zwischen Unterlegscheibe und LötKolbenspitze wird der Fühler des Thermoelementes geklemmt. Der Expe-

rimentator hält die Wärmebildkamera bereit (siehe Abb. 7).



**Abb. 7:** Versuch

#### 3.2. Durchführung

Man regelt die Temperatur am LötKolben bei Raumtemperatur startend in Schritten von ca. 10K langsam bis ca. 170°C hoch und fotografiert die Spitze des LötKolbens mit der Unterlegscheibe derart, dass man noch die Temperaturanzeige des am Thermoelement angeschlossenen Messgerätes sehen kann (s. Abb. 7).

#### 3.3. Auswertung im Unterricht

Die Auswertung der Bilder folgt nun am Computer. Mit dem oben beschriebenen Ausleseprogramm bestimmt man die Leistungsdichten und liest die Temperatur auf dem fotografierten Messgerät ab.

In der unten abgebildeten Tabelle finden sich die Messwerte einer Messung:

T in K	S in W/m <sup>2</sup>
294	426
313	546
333	721
353	902
373	1130
393	1331
413	1791
433	2034
443	2300

**Abb. 8:** Daten einer Beispielmessung

Trägt man  $S$  gegen  $T$  auf, so vermuten die Schülerinnen schon ein  $T^k$ -Gesetz (vergleiche Abbildung 9). Daher tragen die Schülerinnen zur Überprüfung nun  $S$  gegen  $T^2$ ,  $T^3$ ,  $T^4$  und  $T^5$  auf.

Mittels dieser Diagramme erkennen die SuS, dass der Graph zum Exponenten vier der einzige ist, bei dem alle Datenpunkte auf der Trendlinie liegen. Also ist die am besten zutreffende Hypothese:

$$S \propto T^4,$$

## 2.1. Einsatz im Physikunterricht

Die Erfassung von Konzepten zu thermischen Phänomenen ist für Lernende besonders schwierig (Weßnigk u. Heinicke 2017, S. 38). Hier kann die WKB helfen, da diese Infrarotstrahlung für die Schülerinnen und Schüler im Unterricht auf eine neue Art „sichtbar“, erfahrbar und messbar macht. Damit ist die Wärmebildkamera ein kleines *Hole in a Wall*, ein Tor zu neuen Welten. Ein besonders zu nennender Vorteil ist, dass man damit räumliche Temperaturprofile und kleine und kurzfristige Temperaturunterschiede abbilden kann. Dies erklärt, dass die Verwendung von Wärmebildkameras in den letzten Jahren in den Fokus der Physikdidaktik gelangt ist (Grötzebach 2016, IPN-Journal 2017, Mennerich 2015, Weßnigk u. Heinicke 2017), wobei Grötzebach eine ausführliche Liste von Experimenten vorschlägt.

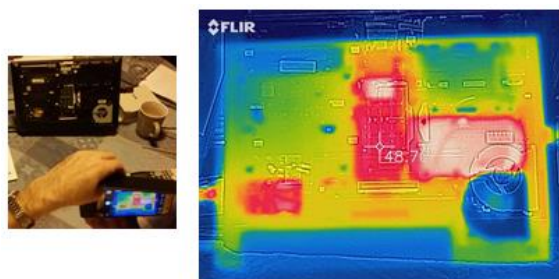


Abb.1: Wärmebild eines offenen Laptops

Wärmebildkameras sind als Erweiterung eines handelsüblicher Smartphones und seit kurzem auch in Smartphones mit integrierter Wärmebildkamera erhältlich. Somit verwenden wir hier mit dem Smartphone eines der beliebtesten Alltagsinstrumente der Lernenden und darüber hinaus eine der beliebtesten Komponenten dieses Gerätes, eine Art von Smartphone-Kamera! Weiter schafft die Vertrautheit der Schülerinnen und Schüler mit dem Medium Bild Vertrauen in die Wärmebildkamera als Messgerät.



Abb.2: Smartphone mit Wärmebildkamera

## 2.2. Wärmebildkameras als Sensor

Laut Herstellerangaben tragen Wellenlängen im Bereich zwischen  $6\text{ }\mu\text{m}$  und  $16\text{ }\mu\text{m}$  zur spektralen Empfindlichkeit der Wärmebildkamera bei. Der Schwerpunkt ist bei  $11\text{ }\mu\text{m}$  und das Maximum liegt bei  $10\text{ }\mu\text{m}$ . Dieser Messbereich ist unten didaktisch vereinfachend als Rechteck dargestellt. Zusammenfassend misst die Wärmebildkamera Intensitäten bzw. Leistungsdichten, welche in Temperaturen

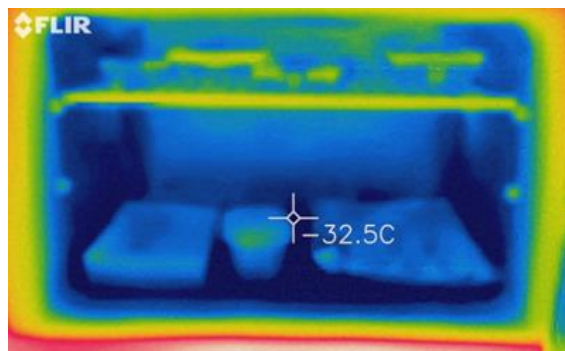


Abb. 3: Wärmebild eines Tiefkühlfaches

umgerechnet werden. Das Maximum entspricht einer Frequenz von  $3\text{ THz}$ . Die integrierte gemessene Intensität ist gleich der gemessenen Leistungsdichte. Mittels des Planck'schen Strahlungsgesetzes erhält man daraus die Temperatur  $T$ , welche im Wärmebild angegeben wird (siehe Abbildung 3). Anhand der Abbildung 4 kann man dies anschaulich verdeutlichen.

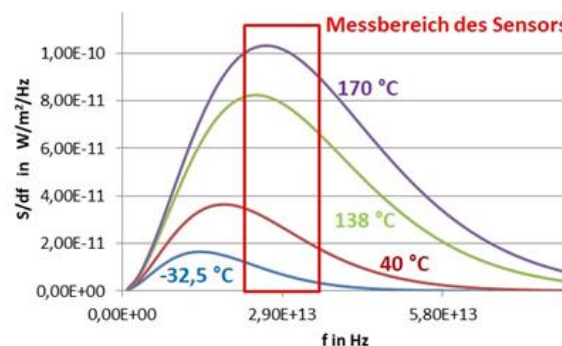


Abb.4: Spektrale Empfindlichkeit mit Planck'schem Strahlungsgesetz

Intensitäten bzw. Leistungsdichten, welche in Temperaturen umgerechnet werden. Über das genaue Verfahren macht der Hersteller keine Angaben.

## 2.3. Struktur der Wärmebilder, Auslese-Software

Zum Auswerten der Wärmebilder haben wir ein PYTHON-Programm geschrieben. Beim Anklicken eines Bildpunktes bestimmt dieses Programm das zugehörige  $S$  und gibt das Ergebnis im Wärmebild aus (siehe Abbildung 6). Insbesondere werden damit Strahlungsverluste auch ohne den Zusammenhang von  $T$  und  $S$  quantifizierbar und damit früher im Unterricht diskutierbar. Das Programm verwendet nur freie Software und ist auf Anfrage bei uns erhältlich.

Die prinzipielle Funktionsweise des Programms erläutern wir für den interessierten Leser im restlichen Teil des Abschnitts. Zum weiteren Verständnis unseres Experimentes ist dieser Teil nicht nötig und kann problemlos übersprungen werden.

Die Wärmebilder werden im JPG-Format gespeichert. Dies ist ein sogenanntes Containerformat, welches neben den bloßen Bilddaten auch noch weitere Informationen in Form von Metadaten enthält.



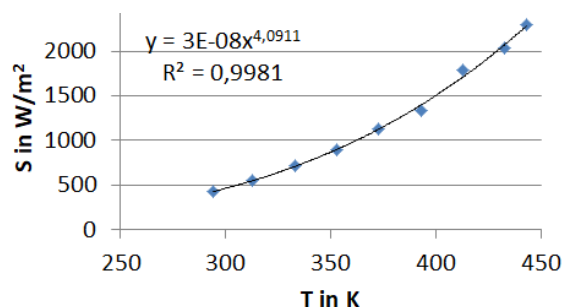


Abb. 9: T-S-Diagramm der obigen Messung mit Regression eines Potenzgesetzes.

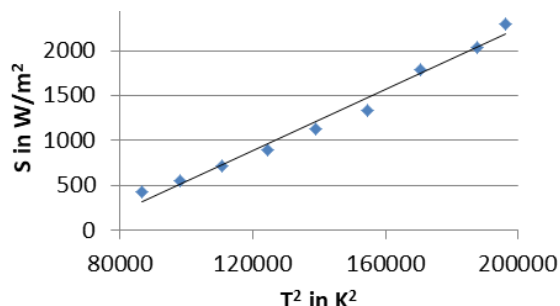


Abb. 10:  $T^2$ -S-Diagramm der obigen Messung auf.

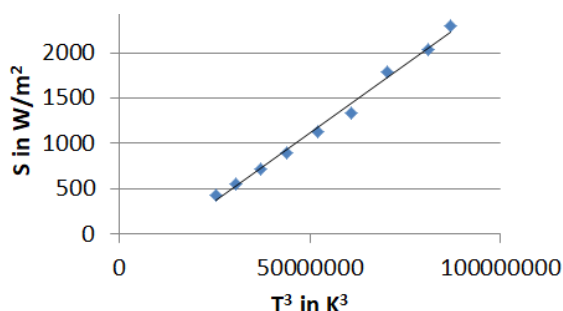


Abb. 11:  $T^3$ -S-Diagramm der obigen Messung auf.

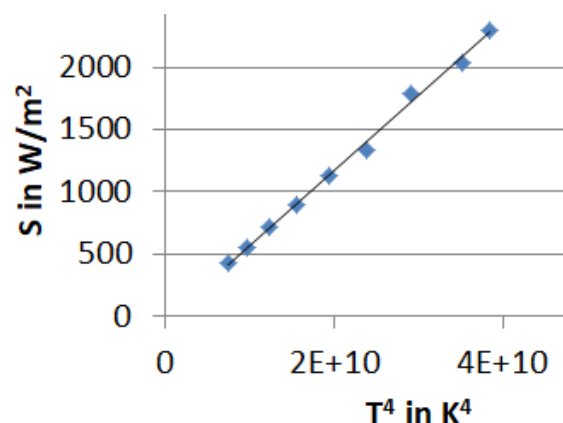


Abb. 12:  $T^4$ -S-Diagramm der obigen Messung  
Somit ist das **Stefan-Boltzmann-Gesetz** entdeckt.

### 3.4. Weitere Auswertung

Aus der obigen Messung lässt sich die **Stefan-Boltzmann-Konstante** bestimmen. Ausgehend von der Vermutung einer Proportionalität zu  $T^4$  liefert die lineare Regression mit einer Ursprungsgerade als

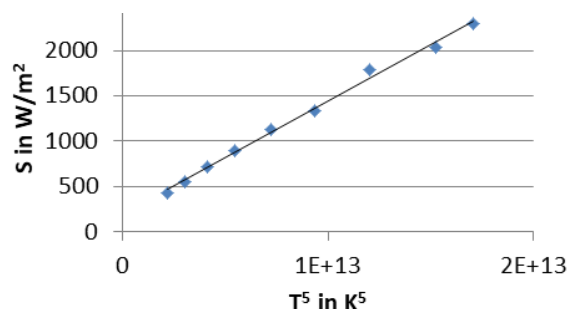


Abb. 13:  $T^5$ -S-Diagramm der obigen Messung  
Steigung den experimentellen Wert der Konstanten

$$\sigma_{exp} = 5,82 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4).$$

Die Abweichung vom Literaturwert

$$\sigma_{lit} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$$

beträgt nur 3%.

Die Regression mit einer Potenzfunktion liefert

$$S(T) = 5,82 \cdot 10^{-8} \cdot T^{4,09}$$

als funktionalen Zusammenhang mit einem sehr gutem Bestimmtheitsmaß von  $R=0,9990$ .

Das ist eine starke Evidenz dafür, dass das beschriebene Experiment in der hier ausgeführten Form sehr genau ist und verdeutlicht das große Potenzial von Experimenten mit einer Wärmebildkamera.

### 4. Erprobung im Unterricht

Der vorgestellte Versuch wurde im Rahmen der Unterrichtseinheit „Thermodynamik“ in einer 10. Klassenstufe eines Gymnasiums erprobt, wobei der Unterrichtsversuch sich über drei Doppelstunden erstreckte. Die erste Doppelstunde diente dem Entdecken der Wärmestrahlung und der Wärmebildkamera. In der zweiten Doppelstunde untersuchten die SuS den Zusammenhang zwischen Leistungsdichte  $S$  und Temperatur  $T$ , wobei die Erderwärmung als Kontext gewählt wurde. Im Rahmen eines Unterrichtsversuches sollten verschiedene Experimente zum Stefan-Boltzmann-Gesetz verglichen werden. Daher führten die SuS neben dem obigen Experiment parallel in Gruppen auch zwei weitere herkömmliche Experimente mit einer Thermosäule durch. Das Material für die Experimente wurde den SuS präsentiert und sie konnten die Experimente mit geringen Lernhilfen selbständig planen. Im regulären Unterricht würden wir als Ergebnis des Unterrichtsversuches (siehe unten) nur das Experiment mit der Wärmebildkamera durchführen.

Die Durchführung des Experiments mit der Wärmebildkamera gelang den Schülerinnen problemlos. Ebenso waren sie in der Lage die Leistungsdichte  $S$  nach einer kurzen Einweisung mittels des Ausleseprogramms aus den Wärmebildern zu bestimmen. Die Hypothese eines  $T^2$ -Gesetzes kam nach dem Erstellen des Diagramms ohne Hilfen aus der Lerngruppe und konnte mit schwachen Hilfen auf ein  $T^k$ -Gesetz verallgemeinert werden. Ebenfalls konnte nach schwachen Erinnerungshilfen der in Abschnitt 3.3 diskutierte Test der besten Hypothese von den

Schülerinnen entwickelt werden. Die Entscheidung für das  $T^4$ -Gesetz fiel einstimmig. Es wurde als Stefan-Boltzmann-Gesetz festgehalten. Während aller Phasen des Experiments waren die SuS sehr aktiv.

In der Auswertung des Unterrichtsversuches wurden die SuS gebeten die Experimente zu bewerten. Es wurde auch nach der Durchführbarkeit der Experimente gefragt. Das Ergebnis bestätigt den obigen Eindruck, da die SuS das Experiment mit der Wärmebildkamera als einfach durchführbar einstufen.

Der Test des hier beschriebenen Versuches verlief also sehr erfolgreich und die SuS haben eigenständig das Stefan-Boltzmann-Gesetz entdeckt.

Es verbleibt der Frage, wie das Experiment den SuS gefallen hat. In der Umfrage hat sich das vorgestellte Experiment mit der Wärmebildkamera gegen die anderen klassischeren Experimente klar durchsetzen können. Dies ist aufgrund der lebensweltlichen Nähe durch die Verwendung des Smartphones und des Mediums Bild nicht überraschend und aus der Literatur bekannt.

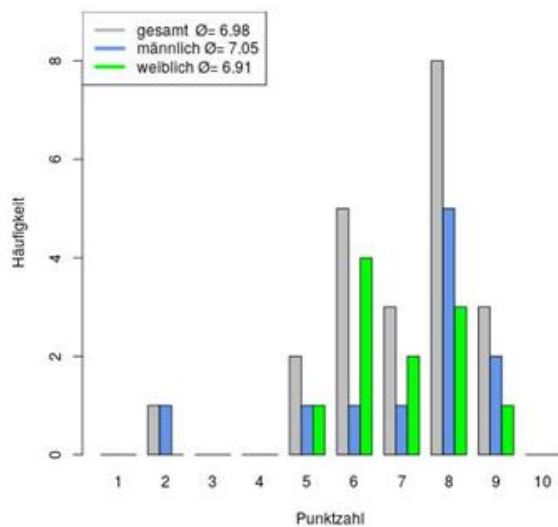


Abb.14: Umfrage zum Versuch mit der Wärmekamera

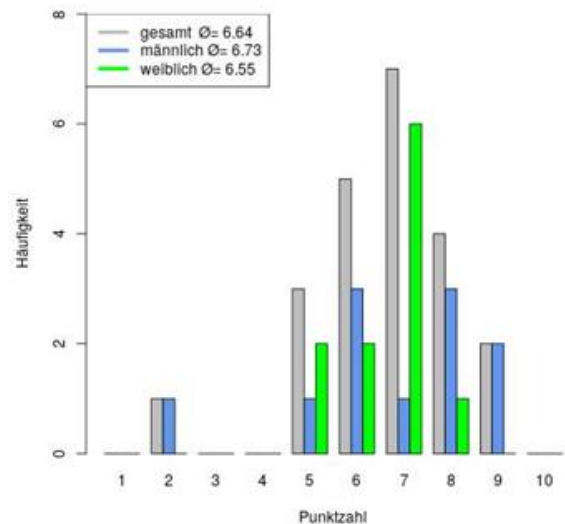


Abb.15: Umfrage zum Versuch mit der Temperatur-Messpistole des Herstellers GosCam vom Typ Premium 8803AL.

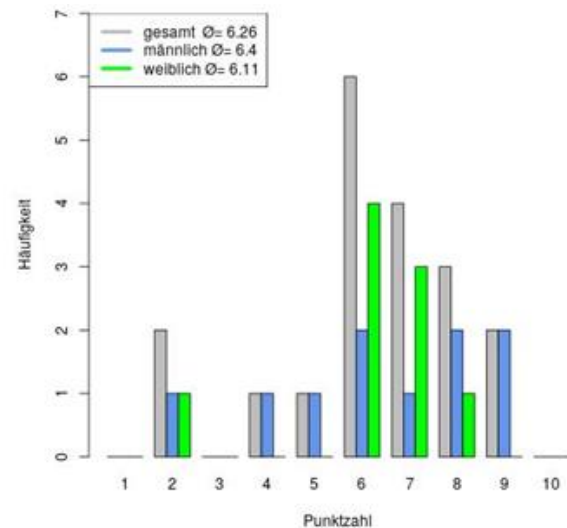


Abb.16: Umfrage zum Versuch ohne Wärmekamera

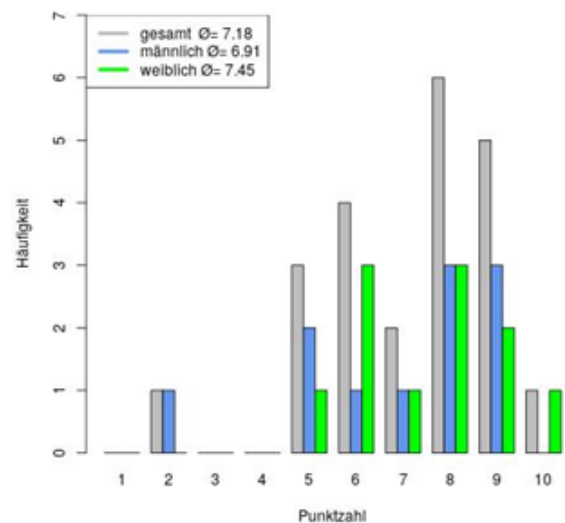


Abb.17: Umfrage: Das Experiment mit der Wärmebildkamera halte ich für einfach durchführbar.

## 5. Fazit zum Versuch

In dem hier diskutierten Experiment haben die Schülerinnen selbständig das Stefan-Boltzmann-Gesetz mithilfe einer Wärmebildkamera entdeckt (Abschnitt 3.1-3.3). Die Genauigkeit der Messung (Abschnitt 3.4) ist eine hohe Evidenz für das große Potenzial von Wärmebildkameras im Unterricht.

Da man das Thermoelement durch ein einfaches Einstechthermometer ersetzen kann, ist dieses Experiment vollständig mit lebensweltlichen Objekten durchführbar.

Im Vergleich zu herkömmlichen Experimenten in einem von uns durchgeführten Unterrichtsversuch (Schäfer 2018) wird das Experiment mit der Wärmebildkamera von den Lernenden ganz klar bevorzugt (siehe Abschnitt 4).

Die Auswertung des Versuches schult zusätzlich noch die Kompetenz der Schülerinnen im Umgang mit Messdaten und mit technischen Hilfsmittel, wie z.B. Tabellenkalkulationen oder dem CAS-Taschenrechner. Darüber hinaus haben wir zur Durchführung eine Open-Source-Software entwickelt, die noch vielfältige andere Möglichkeiten zum Einsatz hat und welche auf Anfrage bei uns erhältlich ist.

Zusammenfassend liefert dieses sehr einfach durchführbare Experiment mit lebensweltlichen Gegenständen sehr gute Messergebnisse. Ferner ist es schüleraktivierend und erweist sich ganz klar als deren und somit auch als unsere erste Wahl. Damit zeigen wir die hervorragenden Möglichkeiten, welche der Einsatz von Wärmebildkameras im Unterricht bietet.

## 6. Klimamodelle

Der Klimawandel wird heute allgemein anerkannt, da die Messdaten recht eindeutig zeigen, dass die mittlere Temperatur auf der Erde seit vielen Jahrzehnten ansteigt. Auch ist unumstritten, dass die Konzentration des Kohlenstoffdioxids in der Atmosphäre seit vielen Jahrzehnten zunimmt. Allerdings bezweifeln einflussreiche Politiker und Parteien auf der ganzen Welt, dass es hierbei einen ursächlichen Zusammenhang gibt. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie die Lernenden diesen Zusammenhang selbstkritisch, zuverlässig, quantitativ und eigenständig nachweisen können.

### 6.1. Grundlegende Begriffe

Die Leistungsdichte  $S$  kann man gut am Kontext Solarmodul einführen, als die Leistung  $P$ , die das Modul pro Fläche  $A$  aufnimmt:

$$S = P/A \quad \{2\}$$

Der von einem Solarmodul aufgenommenen Leistungsdichte  $S$  liegt die von der Sonne bei der Erde eintreffende Leistungsdichte  $S_E$  zugrunde, die sogenannte Solarkonstante:

$$S_E = 1367 \text{ W/m}^2 \quad \{3\}$$

Diese Größen und ihre Messbarkeit sind nicht zu bezweifeln.

### 6.2. Strahlungsgleichgewicht

Ein Gegenstand ist im Strahlungsgleichgewicht, wenn die zugeführte Leistungsdichte  $S_{zu}$  gleich der emittierten  $S_{ab}$  ist. Dabei ist die emittierte Leistung durch das Stefan – Boltzmann – Gesetz bestimmt:

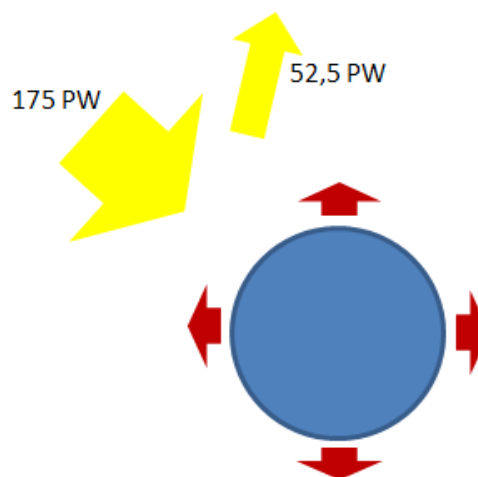
$$S_{zu} = S_{ab} = \sigma \cdot T^4 \quad \{4\}$$

Die Temperatur im Strahlungsgleichgewicht erhalten wir durch Auflösen aus der obigen Gleichung:

$$T = (S_{ab}/\sigma)^{1/4} \quad \{5\}$$

Das Konzept des Strahlungsgleichgewichts und somit Gleichung {5} entsprechen grundlegenden Naturgesetzen und sind somit kaum zu bezweifeln.

Am Beispiel der heißesten Region der Erde, der Wüste Lut, können wir Theorie und Beobachtung vergleichen (Universum 2018): Bei einer realistischen Einstrahlung von ungefähr  $900 \text{ W/m}^2$  ist die Temperatur im Gleichgewicht  $355 \text{ K}$  oder  $82 \text{ °C}$ . Gemessen wurden Temperaturen bis  $78,2 \text{ °C}$ .



**Abb.18:** Klimamodell ohne Absorption durch die Atmosphäre

Das Konzept des Strahlungsgleichgewichts wird auf die Erde als Ganzes angewendet. Entsprechend untersuchen wir das Gleichgewicht aus zugeführter und abgegebener Strahlungsleistung:

$$P_{zu} = P_{ab} \quad \{6\}$$

Die Leistung ermitteln wir als Produkt aus Leistungsdichte und Fläche (siehe Gleichung {2}). Für die zugeführte Leistung ist die Querschnittsfläche maßgeblich:

$$P_{zu,oben} = \pi \cdot r^2 \cdot S_E = 175 \text{ PW} \quad \{7\}$$

Allerdings werden 30 % der Sonnenstrahlen an den oberen Schichten der Atmosphäre reflektiert. Somit wird der Erde folgende Strahlungsleistung zugeführt:

$$P_{zu} = 0,7 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot S_E = 122,5 \text{ PW} \quad \{8\}$$

Für die Emission ist die gesamte Erdoberfläche maßgeblich, also  $A = 4\pi \cdot r^2$ . Somit wird die Leistung

$P_{ab} = 4\pi \cdot r^2 \cdot S_{ab}$  emittiert. Im Strahlungsgleichgewicht ist also:

$$0,7 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot S_E = 4\pi \cdot r^2 \cdot S_{ab} \quad \{9\}$$

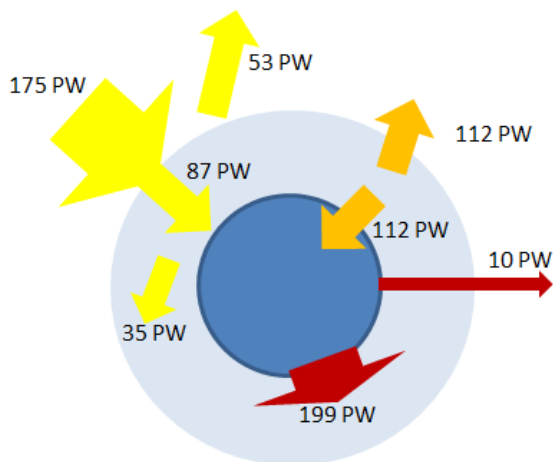
Wir lösen nach der emittierten Leistung auf:

$$S_{ab} = S_E \cdot 0,175 = 239 \text{ W/m}^2 \quad \{10\}$$

Daraus erhalten wir folgende Temperatur im Gleichgewicht (siehe Gleichung {5}):

$$T = (239 \text{ W/m}^2 / \sigma)^{1/4} = 255 \text{ K oder } -18 \text{ }^\circ\text{C} \quad \{11\}$$

Tatsächlich beträgt die mittlere Temperatur 15 °C. Bisher haben wir noch keine Absorption von Strahlung durch die Atmosphäre berücksichtigt. Wir untersuchen nun, welche Auswirkungen das hat.



**Abb.19:** Klimamodell mit Absorption durch die Atmosphäre

### 6.3. Natürlicher Treibhauseffekt

Beobachtungen zeigen, dass eine Leistung von 10 PW vom Boden direkt ins All gelangt:

$$P_{\text{direkt}} = 10 \text{ PW} \quad \{12\}$$

Ins All gelangt weiterhin die reflektierte Leistung:

$$P_{\text{Reflexion}} = 175 \text{ PW} \cdot 0,3 = 52,5 \text{ PW} \quad \{13\}$$

Im Gleichgewicht geht die Leistung 175 PW ins All, woher kommt der Rest? Nach dem Ausschlussverfahren muss der Rest aus der Atmosphäre kommen:

$$P_{\text{aus Atmosphäre}} = P_{\text{zu}} - P_{\text{direkt}} - P_{\text{Reflexion}} = 112 \text{ PW} \quad \{14\}$$

Die Atmosphäre strahlt insgesamt genauso viel Leistung nach unten ab wie nach oben, also 112 PW. Am Erdboden kommen zudem 50 % der gesamten Einstrahlung von 175 PW an, also:

$$P_{\text{direkt abwärts}} = 87,5 \text{ PW} \quad \{15\}$$

Die übrigen 20 % werden von der Atmosphäre absorbiert. Insgesamt kommt am Erdboden also folgende Summe an:

$$\begin{aligned} P_{\text{zu, Boden}} &= P_{\text{direkt abwärts}} + P_{\text{aus Atmosphäre}} \\ &= 199 \text{ PW} = P_{\text{ab, Boden}} \end{aligned} \quad \{16\}$$

Diese Leistung wird im Gleichgewicht auch emittiert. Wir dividieren durch  $4\pi \cdot r^2$  und erhalten so die vom Erdboden emittierte Leistungsdichte:

$$S_{ab} = 199 \text{ PW} / 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 = 390 \text{ W/m}^2 \quad \{17\}$$

Dieser Betrag könnte ungenau sein, da die Atmosphäre recht grob modelliert wurde, das wird in Abschnitt 6.5 genauer untersucht.

Hieraus ermitteln wir wieder die Temperatur am Erdboden im Gleichgewicht (siehe Gleichung {5}):

$$\begin{aligned} T &= (390 \text{ W/m}^2 / \sigma)^{1/4} \\ &= 287,99 \text{ K oder } 14,84 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned} \quad \{18\}$$

Das Ergebnis entspricht schon relativ genau dem beobachteten Wert von 15 °C. Die Absorption von Strahlung durch die Atmosphäre wirkt sich also durch eine Erwärmung um 33 K aus. Diese Erwärmung nennt man den natürlichen Treibhauseffekt:

$$\Delta T_{\text{natürlich}} = 33 \text{ K} \quad \{19\}$$

### 6.4. Anthropogener Treibhauseffekt

Die mittlere Temperatur der Erde stieg in den letzten Jahrzehnten um folgenden Betrag (siehe z. B. [Universum]):

$$\Delta T = 0,5 \text{ bis } 1 \text{ K} \quad \{20\}$$

Im gleichen Zeitraum stieg der Anteil an Kohlendioxid in der Atmosphäre um 29 % an. Dieses Gas absorbiert prinzipiell IR, das führt zu einer Vergrößerung  $\Delta S_{\text{ab, Boden}}$  der vom Boden emittierten Leistungsdichte. Dies vergrößert den Treibhauseffekt (s. Gl. {16} und {17}). Hinzu kommen weitere sogenannte anthropogene Treibhausgase, die durch Menschen in die Atmosphäre gelangen. Die entscheidende Frage ist, welcher Anteil des Temperaturanstiegs in Gleichung {20} durch die anthropogenen Treibhausgase verursacht wird.

Um diese Frage zu beantworten, kann man die Absorption von IR durch die anthropogenen Treibhausgase im Labor oder mit einem Satelliten (z. B. IRIS, Poli und Brunel 2018) messen. Damit kann man ausrechnen, welche Vergrößerung  $\Delta S_{\text{ab, Boden}}$  der vom Boden emittierten Leistungsdichte durch die anthropogenen Treibhausgase verursacht wird. Als Ergebnis erhält man:

$$\Delta S_{\text{ab, Boden}} = 2,7 \text{ W/m}^2 \quad \{21\}$$

Dieser Betrag ist kaum zu bezweifeln (Houghton et al. 2001), da er auf stets überprüfbareren Labormessungen beruht.

Somit erhöht sich die am Boden emittierte Leistungsdichte von 390 W/m<sup>2</sup> auf 392,7 W/m<sup>2</sup>. Wir ermitteln die dabei verursachte Temperatur mithilfe von Gleichung {5):

$$\begin{aligned} T &= (392,7 \text{ W/m}^2 / \sigma)^{1/4} \\ &= 288,48 \text{ K oder } 15,33 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned} \quad \{22\}$$

Der anthropogene Treibhauseffekt erwärmt die Erde somit um folgende Temperatur:

$$\Delta T_{\text{anthropogen}} = 0,49 \text{ K} \quad \{23\}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der beobachteten Temperaturerhöhung in Gleichung {20} also gut überein. Aber ist das Ergebnis auch zuverlässig? Das untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

### 6.5. Zuverlässigkeit der Untersuchung

Wir haben die durch die anthropogenen Treibhausgase verursachte Temperaturerhöhung  $\Delta T$  in Gleichung {23} ermittelt. Dazu haben wir drei Gesetzmäßigkeiten verwendet:

- Die Abhängigkeit der absoluten Temperatur  $T$  des Strahlungsgleichgewichts in Gleichung {5}, d.h. das Stefan-Boltzmann-Gesetz.
- Die vom Erdboden emittierte Leistungsdichte von  $S = 390 \text{ W/m}^2$  in Gleichung {17}.
- Die durch Treibhausgase verursachte Erhöhung  $\Delta S$  der emittierten Leistungsdichte in Gleichung {21}.

Von diesen Gesetzmäßigkeiten sind die erste und die dritte kaum zu bezweifeln, wie wir oben bereits begründet haben. Allerdings hängt die berechnete vom Boden emittierte Leistungsdichte von  $S = 390 \text{ W/m}^2$  von mehreren Modellannahmen ab und könnte auch einen anderen Betrag haben, beispielsweise  $420 \text{ W/m}^2$  oder im Extremfall  $450 \text{ W/m}^2$ . (Houghton 2001).

Wir untersuchen, welchen Einfluss das auf die Temperaturerhöhung  $\Delta T_{\text{anthropogen}}$  hätte, die wir berechnet haben. Dazu ermitteln wir die neue Temperatur  $T'$  ohne anthropogenen Treibhauseffekt, indem wir in Gleichung {18} statt  $390 \text{ W/m}^2$  nun  $450 \text{ W/m}^2$  einsetzen. So erhalten wir:

$$T = (450 \text{ W/m}^2 / \sigma)^{1/4} = 298,47 \text{ K} \quad \{24\}$$

Entsprechend ermitteln wir die neue Temperatur  $T_{\text{anthropogen}}$  mit anthropogenem Treibhauseffekt, indem wir in Gleichung {22} statt  $392,7 \text{ W/m}^2$  nun  $452,7 \text{ W/m}^2$  einsetzen. So erhalten wir:

$$T = (452,7 \text{ W/m}^2 / \sigma)^{1/4} = 298,92 \text{ K} \quad \{25\}$$

Nun bestimmen wir den durch das anthropogene Treibhausgas verursachten Temperaturanstieg, indem wir die Differenz der beiden Temperaturen in den Gleichungen {24} und {25} berechnen:

$$\Delta T_{\text{anthropogen}} = 298,92 \text{ K} - 298,47 \text{ K} = 0,45 \text{ K} \quad \{26\}$$

Der Unterschied zum Ergebnis in Gleichung {23} beträgt nur  $0,04 \text{ K}$ , obwohl der Unterschied der ermittelten Temperatur am Erdboden  $298,92 \text{ K} - 287,99 \text{ K} = 10,93 \text{ K}$  beträgt. Das zeigt völlig klar, dass der durch den anthropogenen Treibhauseffekt verursachte Temperaturanstieg um einen Faktor  $10,93/0,04 = 273$  genauer ermittelt wird als die Temperatur am Erdboden. Die Lernenden können diese Tatsache mit weiteren Zahlenbeispielen leicht bestätigen.

Insbesondere können die Lernenden somit den von den anthropogenen Treibhausgasen verursachten Temperaturanstieg sehr genau berechnen und so die entscheidende Frage nach dem Verursacher zuverlässig beantworten.

Zudem können sie die Genauigkeit ihrer Berechnung und somit die Zuverlässigkeit ihrer Entscheidung selbst überprüfen.

Ferner ist das Modell so einfach, dass die Lernenden es leicht eigenständig erlernen und anwenden können. Insbesondere sind sie dabei keineswegs auf Hilfen von Rechenzentren angewiesen, wie es im Grundsatzprogramm einer größeren politischen Partei der Gegenwart behauptet wird. Im Gegenteil ist dies ein aktuelles und schönes Beispiel für Aufklärung (Kant): Die Lernenden können sich durch eine eigenständige Untersuchung aus ihrer vermeintlichen Unmündigkeit und Abhängigkeit von Experten oder Rechenzentren befreien, und zwar bei einem nach Klafki epochaltypischen Problem (Klafki).

### 7. Diskussion

Jugendliche interessieren sich sehr stark für ihre Smartphones und insbesondere ist die darin integrierte Kamera sehr attraktiv und häufig auch ausschlaggebend für den Kauf eines Smartphones. Eine Wärmebildkamera für Smartphones schließt perfekt an diese Voraussetzung an und bietet dazu Einblick in einen sonst unsichtbaren Bereich der Physik. Zusätzlich schafft das Medium Bild noch Vertrauen in die von der Kamera gemachte Messung. Unser Experiment zum Stefan-Boltzmann-Gesetz mit einer Wärmebildkamera profitiert hiervon und liefert ferner ein sehr gutes Messergebnis. Kommt eine einfache Durchführbarkeit hinzu, so überrascht es nicht, dass der Versuch bei den SuS gegenüber herkömmlichen Versuchen punktet.

Aus didaktischer Sicht ist die selbstständige Entdeckung sehr erfreulich, da diese den Weg zur selbstständigen Analyse des natürlichen und anthropogenen Treibhauseffektes ebnet, wie wir in Abschnitt 6 beweisen. Genauer zeigen wir, dass die SuS mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz Klimamodelle und den Beitrag von  $\text{CO}_2$  am Treibhauseffekt berechnen können und die Zuverlässigkeit ihrer Ergebnisse prüfen können. Als Kenntnisse benötigen die SuS die Fläche des Kreises, den Oberflächeninhalt der Kugel, das Konzept des Strahlungsgleichgewichtes und aus der Literatur bekannte Klimamessdaten. Somit sind die mathematischen Voraussetzungen Ende der 10. Klasse geschaffen.

Damit befreien die SuS sich aus der Abhängigkeit von Experten oder Meinungsmachern und werden zur Bildung eines eigenen, fundierten Urteils befähigt. Daher halten wir den Versuch in Kombination mit der Klimarechnung für sehr fruchtbar und besonders empfehlenswert!

### 8. Literatur

Boltzmann, L. (1884): Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie. In: Annalen der Physik und Chemie. Bd. 22, 1884, S. 291–294.



- Carmesin, H.-O. (2004): Entdecken des Stefan-Boltzmann-Gesetzes mit einem Flüssigkeitsthermometer, Praxis Magazin, PdN-PhiS. 5/53. S. 36-38.
- Cornelsen (2008): Physik Oberstufe Gesamtband, Berlin: Cornelsen Verlag.
- Demtröder (1995): Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. Berlin: Springer.
- Dorn-Bader (2008): Physik 11 für das Gymnasium in Niedersachsen, Prof. Dr. R. Müller et al.. Braunschweig: Schroedel Verlag.
- Dorn-Bader (2017): Einführungsphase Physik Sek II. Gymnasium in Niedersachsen, Prof. Dr. R. Müller et al.. Braunschweig: Schroedel Verlag.
- Gerthsen Physik (2015). 25. Auflage. Herausgeber: D. Meschede. Berlin: Springer.
- Grötzebauch, H. (2016): Versuche zur Thermodynamik: [https://didaktik.physik.fu-berlin.de/home/download/TD/Skript\\_Thermodynamik.pdf](https://didaktik.physik.fu-berlin.de/home/download/TD/Skript_Thermodynamik.pdf).
- Houghton, J.T. et al., Hrsg. (2001): Climate Change 2001: The Scientific Basis. Contribution of the Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge und New York.
- IPN Journal (2017): Energie. Sichtbar machen. Die Wärmebildkamera als Lehrmittel. Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Universität Kiel, S. 24-25: [https://www.ipn.uni-kiel.de/de/publikationen#b\\_start=0&c5=zeitschrift](https://www.ipn.uni-kiel.de/de/publikationen#b_start=0&c5=zeitschrift).
- Impulse Physik (2017): Einführungsphase, Niedersachsen. Stuttgart: Klett.
- Leybold (2019): LD-Handblätter Physik: Stefan-Boltzmann-Gesetz: Temperaturabhängige Messung der Strahlungsintensität eines „Schwarzen Körpers“, Leybold: [https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p5/p5521\\_d.pdf](https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p5/p5521_d.pdf).
- Mennerich, I. (2015): Experimente mit der Wärmebildkamera. Herausgeber: Landeshauptstadt Hannover, Fachbereich Bibliothek und Schule, Schulbiologiezentrum: <http://www.schulbiologiezentrum.info/AH%2019.91%20%20Experimente%20mit%20der%20W%E4rmebildkamera.pdf>.
- Poli, P. und Brunel, P. (2018): Assessing reanalysis quality with early sounders Nimbus-4 IRIS (1970) and Nimbus-6 HIRS (1975). Advances in Space Research, 62, S. 245–264.
- Schäfer, L. (2018): Untersuchung von Leistungsdichten mit Hilfe einer Wärmebildkamera – Ein Unterrichtsversuch im Fach Physik in einer 10. Klasse des Gymnasiums. Stade: Studien-seminar Stade.
- Tipler-Mosca (2015): Physik für Wissenschaftler und Ingenieure. 7. Auflage. Herausgeber: J. Wagner. Berlin: Springer.
- Universum (2018): Physik. Niedersachsen. Einführungsphase. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Weßnigk, S. u. Heinicke, S. (2017): Die Wärmebildkamera – Ein Beitrag zur Sinneserweiterung. In: Unterricht Physik 159/160, 38–43.